

УДК 537.2 + 519.6

Десятов Д.А.

студент

Научный руководитель: Матвеев И. В., к.ф.-м.н.

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и

информатики

Россия, г. Самара

**РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ
СИЛОВЫХ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДЛЯ
СИСТЕМ ТОЧЕЧНЫХ И ПРОТЯЖЁННЫХ ЗАРЯДОВ**

Аннотация:

В статье рассматриваются подходы к компьютерному моделированию электростатических полей с визуализацией силовых линий. Предложена комбинация метода суперпозиции и дискретизации распределённых источников, позволяющая рассчитывать поля от точечных зарядов, бесконечных нитей и плоскостей, а также заряженных отрезков конечной длины. Для трассировки силовых линий как интегральных кривых применён метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Разработаны критерии остановки процесса и автоматическая генерация стартовых точек на основе геометрии каждого источника. Описана модульная реализация на Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. Алгоритмы отличаются универсальностью и могут быть использованы в образовательных целях.

Ключевые слова:

Электростатика, силовые линии, метод Рунге-Кутты, дискретизация заряда, суперпозиция полей, трассировка, численное моделирование.

D.A. Desyatov

Student

Supervisor: I.V. Matveyev, PhD

Volga Region State University of Telecommunications and Informatics

Russia, Samara

DEVELOPMENT OF NUMERICAL ALGORITHMS FOR CONSTRUCTING ELECTROSTATIC FIELD LINES FOR SYSTEMS OF POINT AND EXTENDED CHARGES

Abstract:

This article discusses approaches to computer modeling of electrostatic fields with field line visualization. A combination of the superposition method and distributed source discretization is proposed, allowing for the calculation of fields from point charges, infinite filaments and planes, and charged segments of finite length. The fourth-order Runge-Kutta method is used to trace field lines as integral curves. Process termination criteria and automatic generation of starting points based on the geometry of each source are developed. A modular implementation in Python using the NumPy and Matplotlib libraries is described. The algorithms are versatile and can be used for educational purposes.

Keywords:

Electrostatics, field lines, Runge-Kutta method, charge discretization, field superposition, tracing, numerical simulation.

Введение

Изучение электростатических полей невозможно без наглядного представления силовых линий. В учебном процессе часто приходится ограничиваться ручным рисованием простейших конфигураций, поскольку коммерческие пакеты дороги и сложны в освоении. Существующие свободные программы обычно поддерживают лишь точечные заряды, что

недостаточно для демонстрации полей, создаваемых проводами, пластинами или стержнями конечной длины. Цель данной работы – разработка универсального алгоритмического аппарата, позволяющего моделировать силовые линии для произвольных комбинаций точечных и распределённых источников, и его программная реализация на языке Python.

Основная часть

1. Физическая модель и принцип суперпозиции

Электростатическое поле в вакууме подчиняется закону Кулона. Если в пространстве присутствует несколько источников, результирующая напряжённость находится как векторная сумма полей от каждого из них (принцип суперпозиции). Для распределённых зарядов (линейных или поверхностных) прямое аналитическое решение возможно лишь при высокой симметрии. В общем случае применяют численную аппроксимацию: непрерывное распределение заменяют совокупностью элементарных точечных зарядов, а затем суммируют их вклады. Такой подход прост в реализации и даёт хорошую точность при разумном числе элементов.

В разработанной системе поддерживаются четыре типа источников:

- **Точечный заряд** – поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, вектор направлен радиально.
- **Бесконечная равномерно заряженная нить** – поле убывает как $1/r$, вектор перпендикулярен нити.
- **Бесконечная равномерно заряженная плоскость** – поле однородно, вектор направлен по нормали к плоскости.

- **Заряженный отрезок** – поле вычисляется путём разбиения отрезка на N малых частей, каждая из которых моделируется точечным зарядом. Оптимальное значение N лежит в диапазоне 50–100.

Для предотвращения численных проблем вблизи сингулярностей вводится регуляризация: если расстояние до источника становится меньше заданного порога (10^{-6}), оно искусственно увеличивается до этого порога.

2. Трассировка силовых линий методом Рунге-Кутты

Силовая линия определяется как кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряжённости. В двумерном случае это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = E_x(x, y), \frac{dy}{dt} = E_y(x, y),$$

где t – вспомогательный параметр. Для численного интегрирования используется классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка. На каждом шаге h выполняются четыре вычисления правой части, после чего новое положение вычисляется по формуле:

$$\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i + \frac{h}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4),$$

где $\vec{k}_1 = \vec{E}(\vec{r}_i)$, $\vec{k}_2 = \vec{E}\left(\vec{r}_i + \frac{h}{2}\vec{k}_1\right)$ и т.д. Метод обеспечивает локальную ошибку порядка $O(h^5)$.

Условия остановки расчёта линии:

- выход точки за пределы заранее заданной области;
- приближение к точечному заряду на расстояние меньше 10^{-6} ;
- модуль напряжённости становится ниже 10^{-12} (нейтральная точка);

- превышено максимальное число шагов (например, 10000);
- расстояние до заряженного отрезка или до любого из его элементов стало меньше 10^{-5} .

Каждая линия строится в двух направлениях – по полю и против поля. Это позволяет получить полную кривую, начинающуюся на положительном заряде (или уходящую в бесконечность) и заканчивающуюся на отрицательном (или приходящую из бесконечности).

3. Автоматический выбор начальных точек

Для равномерного покрытия области силовыми линиями стартовые точки генерируются около каждого источника. Способ размещения зависит от типа источника:

- **Точечный заряд и нить** – точки равномерно распределяются на малой окружности радиуса 0.1 (обычно 12–16 точек).
- **Плоскость** – точки размещаются на прямой, параллельной плоскости, на расстоянии 0.05 от неё, с равным шагом (10–20 точек).
- **Отрезок** – точки располагаются на двух линиях, параллельных отрезку и отстоящих от него на 0.05, а также по дугам окружностей вокруг концов отрезка (по 6 дуговых точек).

Наборы от всех источников объединяются; слишком близкие точки удаляются. Благодаря такому подходу визуализация получается информативной, без пустых областей и излишнего сгущения линий.

4. Программная реализация

Система написана на языке Python, который обладает богатым экосистемой для научных расчётов. Для векторных операций задействована библиотека NumPy, для построения графиков – Matplotlib.

Архитектура построена по модульному принципу: отдельные классы описывают каждый тип источника, общий калькулятор суммирует поля, трассировщик выполняет интегрирование, а модуль визуализации отображает результаты. Для хранения конфигураций предусмотрена поддержка SQLite. Программа работает в среде Linux и распространяется как открытое программное обеспечение.

Выводы

В результате работы разработаны и реализованы численные методы, позволяющие:

- рассчитывать электростатические поля для комбинаций точечных и распределённых зарядов на основе суперпозиции и дискретизации;
- строить силовые линии как интегральные кривые с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка, оснащённого надёжными критериями остановки;
- автоматически генерировать стартовые точки, адаптированные к геометрии каждого источника, что обеспечивает равномерное заполнение расчётной области.

Предложенные алгоритмы отличаются простотой, гибкостью и достаточной для учебных целей точностью. Программная реализация доступна для свободного использования и может быть легко расширена добавлением новых типов источников.

Использованные источники:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория знаний, 2024. – 639 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 429 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 656 с.
5. Хайер Э., Нёрсетт С.П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
6. Hunter J.D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment // Computing in Science & Engineering. – 2007. – Vol. 9, No. 3. – P. 90–95.
7. Oliphant T.E. Guide to NumPy. – 2nd ed. – Austin, TX: Continuum Press, 2015. – 371 p.