УДК 372.851

Хомушку А.Б
Студент магистратуры
3 курс, «Институт физико-математического и информационно-экономического образования
Новосибирский Государственный Педагогический Университет
Россия, г. Новосибирск.

ПРОБЛЕМНЫЕ МЕСТА В РЕШЕНИИ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. В данной статье рассматривается понятие «иррациональные уравнения», приводятся примеры решения иррациональных уравнений, указываются проблемные места при решении иррациональных уравнений в школьном курсе математики на примерах.

Ключевые слова: математика, уравнение, иррациональные уравнения, корень, переменные

Khomushku A. B
Master's student
3rd year, " Institute of Physics and Mathematics and Information and Economic Education
Novosibirsk State Pedagogical University
Russia, Novosibirsk.

PROBLEM AREAS IN SOLVING IRRATIONAL EQUATIONS IN A SCHOOL MATHEMATICS COURSE

Annotation. In this article, the concept of "irrational equations" is considered, examples of solving irrational equations are given, problem areas are indicated when solving irrational equations in a school mathematics course using examples.

Keywords: mathematics, equation, irrational equations, root, variables

Алгебра является одним из самых сложных предметов, по мнению многих учащихся. Наибольшая доля материала, с которым ученики знакомятся в рамках школьного курса математики, связана с решением уравнений и неравенств. Как показывает практика, раздел алгебры, посвященный решению иррациональных уравнений и неравенств становится более проблематичным в усваивании, поскольку внимания этому разделу уделяют очень мало[2]. Проблема восприятия иррациональных уравнений и методик их решения в настоящее время становится актуальной и дискуссионной темой, обусловленных не только своей сложностью и объемностью материалов, но и необходимости подготовки учеников к сдаче единого государственного экзамена, где иррациональные уравнения, безусловно, станут частью экзаменационного материала.

В связи с актуальностью темы настоящей статьи была определена цель работы, которая состоит в обосновании проблематичных мест в решении иррациональных уравнений в школьном курсе математики. Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Охарактеризовать понятие «иррациональное уравнение» в рамках школьного курса математики;

2. Определить методы решения иррационального уравнения на примерах;

3. Указать проблематичные места в решении иррациональных уравнений с использованием примеров.

В школьном курсе математики уравнение представляет собой одно из основных понятий, которое определяется как своего рода соотношение, представляющее неизвестную величину, которую нельзя измерить или решить по готовой формуле. В таком случае, иррациональные уравнения – это уравнения, где переменная содержится под знаком корня. Как правило, иррациональные уравнения сводятся к равносильной системе, которая содержит уравнения и неравенства. Рассмотрим сказанное на примере[5]:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} <=> \text{или} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Из двух систем необходимо выбрать ту, которую проще решить.

$$\sqrt{f(x)} = a \qquad (2)$$

Если $a < 0$, то уравнение не имеет корней.

Если $a \geq 0$, то уравнение равносильно $f(x) = a^2$

Тогда получим:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) <=> \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases} \tag{3}$$

Следует отметить, что иррациональные уравнения решаются путем воздействия обеих частей уравнения в натуральную степень. Но, следует обратить внимание, что при возведении уравнения в степень могут появиться посторонние корни, в таком случае необходимо после решения иррационального уравнения провести проверку.

Далее приводятся примеры решения иррациональных уравнений.

Пример 1[4]:

$$\sqrt{2x+1} = 3$$

Избавляемся от корней:

$$2x + 1 = 9$$

$$2x = 8$$

$$x=4$$

Поскольку уравнение иррациональное, то, как было отмечено ранее, необходимо проверить полученный ответ:

$$\sqrt{2 \times 4 + 1} = 3$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3=3$$

Пример 2[4]:

$$\sqrt{2x-5} = \sqrt{4x-7}$$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$2x - 5 = 4x - 7$$

Упрощаем: x=1

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3}$$

Получается под корнем отрицательное число, получается посторонний корень уравнения. Поэтому в ответе будем писать «нет решения».

Пример 3[4]:

$$\sqrt{12-x}=x$$

Возводим в квадрат обе части уравнения:

$$12-x=x^2$$

Далее упрощаем уравнение и решаем его, используя теорему Виета.

$$x^2+x-12=0$$

$$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-4 \end{cases}$$

Получается два корня, которые следует подставить в исходное уравнение:

Подставляем первый корень - 3

$$\sqrt{9}=3$$

3=3, следовательно, корень подходит.

Подставляем второй корень: -4

$$\sqrt{16}=-4$$

$$4\neq-4$$

Получается -4 – посторонний корень.

На первый взгляд, при разборе примеров, может показаться, что иррациональные уравнения решаются очень просто, тем не менее, школьники сталкиваются с трудностями, которые характеризуются следующими особенностями:

– Отсутствие четкого алгоритма решения иррациональных уравнений;

– Необходимость преобразований, приводящих к уравнениям, не равносильным, в виду чего возникают ошибки, связанные с потерей или приобретением посторонних корней в ходе решения[6].

Самый распространенный вид иррационального уравнения, который встречается на экзаменах, и где школьники наиболее часто допускают ошибки, это уравнение вида:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \tag{4}$$

Решая данное уравнение, школьники возводят его в квадрат, тем самым образуя посторонние корни, и потом они забывают выполнить проверку. Именно поэтому, уравнение данного вида целесообразно решать с использованием равносильных преобразований[3]:

Таким образом, мы получим, что уравнение $\sqrt{A(x)} = B(x)$ является равносильным системе $A(x) = B^2(x)$ и неравенства $B(x) \geq 0$.

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \;<=> \begin{cases} A(x) = B(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Следует отметить, что иногда ученики добавляют к системе такое неравенство, как $A(x) \geq 0$, но этого делать не следует, поскольку данное неравенство выполняется автоматически.

Другой вид сложного для учеников уравнения является иррациональное уравнение[3]:

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} \tag{6}$$

Такой вид уравнения решается следующим способом:

$$\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)} <=> \begin{cases} A(x) = B(x) \\ B(x) \geq 0 (A(x) \geq 0) \end{cases} \tag{7}$$

Важно отметить, что в системе вторым из условий проверяется одно из неравенств $B(x) \geq 0$ или $A(x) \geq 0$, но ученики часто записывают оба неравенства.

Рассмотрим два примера, где у учеников встречаются наибольшие трудности[1]:

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$$

Во-первых, выделим, что корнем для решения данного уравнения является $x = 1$. Следует отметить, что левая часть уравнения состоит из суммы двух возрастающих функций, тем самым принимает каждое свое значение только один раз. В правой части функция $y = 1$, параллельная оси *ox*, исходя из этого, функции имеют единственную точку пересечения x=1. Ответ: x=1.

Во втором примере предлагается решить следующее уравнение[1]:

$$-x^2 + 2x - 1 = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

В данном примере возведение обеих частей в квадрат будет нерациональным шагом. Левая часть уравнения $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$, а поскольку правая часть не может быть меньше нуля, а значит решение возможно, только если обе части уравнения равны нулю, а такое условие выполняется только при *x*=1, следовательно, ответ будет *x*=1.

Таким образом, в настоящей статье были рассмотрены основные сложные моменты, с которыми сталкиваются школьники при решении иррациональных уравнений на примере двух видов. В заключение отмечу, что для повышения успеваемости школьников, необходимо выделить больше времени на освоение материала с целью полномерного освоения всех элементов, методов и свойств иррациональных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия, «ABF», 1995 352 с.
2. Рябкова М. О. Приёмы работы в малых группах при обучении школьников математике на этапе подготовки к итоговой аттестации // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2011. – 4 квартал 2011. – С. 16–20. – URL: http://e-koncept.ru/2011/11404.htm.
3. Черкасов, О. Ю. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. Курс подготовки к ГИА, [Текст] / О. Ю. Черкасов – М.: АСТ-ПРЕСС, 2014 – 464 с.
4. Шенцева Т. А., Прудских А. Г. Элективный курс "Задачи с параметром" // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2014. – Т. 12. – С. 191–195. – URL: http://e-koncept.ru/2014/54146.htm.

5. Шахмейстер, А.Х. Иррациональные уравнения и неравенства. [Текст] – 4-е издание – СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс»: М.: Издательство МЦНМО 2011 – 2016 с.