Годес А.М.
инженер
РФ, С-Петербург

УДК 511.1

ЗАДАЧА ПЬЕРА ФЕРМА

Рассмотрены пути поиска и предложен вариант арифметического решения задачи, направленной в 1658 году Пьером Ферма английским математикам.
Ключевые слова: *Вейль А., Виет, Эйлер Л.*
Godes A.M., Problem of P. Fermat, In this article I have considered ways of searching and I have suggested a version of arithmetic solving of a problem that Piere Fermat had offered to english mathematicians in 1658.
Key words: Weil A., Wiete, Euler L

ЗАДАЧА ПЬЕРА ФЕРМА

Эта задача была предложена Пьером Ферма в 1658 году выдающимся математикам Англии Валлису и Броункеру: «*данное кубическое число разложить на два рациональных куба. Это одно из моих отрицательных (*т. е. содержащее запрет — А.Г.*) предложений, которое ни Валлис, ни милорд Броункер не смогут легко доказать»*.

Решение, предложенное Ферма, до нас не дошло. И.Г. Башмакова в замечательной книге «П.Ферма, Исследования по теории чисел и диофантовому анализу» пишет:
«*В своих замечаниях на полях «Арифметики» Диофанта и в письмах Ферма неоднократно утверждает, что доказал Великую теорему для n = 3. Мог ли он это сделать? В своей книге А.Вейль даёт реконструкцию этого доказательства, основываясь на доказательстве Эйлера. При этом А.Вейль показывает, что Ферма мог обойтись и без введения мнимых чисел вида* $m + n\sqrt{-3}$*, во-вторых, оно носит не алгебраический характер, как у Эйлера, а чисто арифметический».*

Ниже предлагается рассмотреть ещё один вариант арифметического решения этой задачи при дополнительном условии.

Задача
Доказать, что P_i=y^3+z$^3 - w^3$ не может быть равным нулю, если τ_i=y+z $- w$положительное число.
Обозначения, используемые в дальнейшем (i - чётный индекс):
1) τ_i=y+z $- w$
2) $\tau_{(i+1)} = 2\tau_i =$ (y+z) $-(w-y)-(w-z)$=a $- b - c$
3) α_i=yw+wz $-$ zy
4) β_i=yzw
5) $\gamma_i =$ (z+y)$(w-z)(w-y)$=abc
6) P_i=y^3+z$^3 - w^3$

Подсказка 1. Кубическую форму P_i надо представить черезτ_iиγ_i.
Подсказка 2. Кубическая форма$P_{(i+1)} > 0$всегда.

Решение
1. Представление τ_i^3, P_i , $P_{(i+1)}$
$\tau_i^3 = (y+z-w)^3 = P_i + 3(y+z)yz - 3(y+z)^{(2)}w + 3(y+z)w^2$=
=$P_i + 3(y+z)(zy - yw - zw + w^2) = P_i + 3(y+z)(w-y)(w-z) = P_i + 3\gamma_i$
$P_i = \tau_i^3 - 3\gamma_i(*)$

(пп. 2-7 прошу рассматривать как проверку перспективности Следствий 1-6)
2. Представление $\tau^3_{(i+1)} = (a-b-c)^3$и $P_{(i+1)} = a^3 - b^3 - c^3$аналогично предыдущему.
$P_{(i+1)} = \tau^3_{(i+1)} + 3\gamma_{(i+1)} > 0$

3. Представлениеγ_iчерезτ_i,α_i,β_i
$\gamma_i = (y+z)(zy - yw - zw + w^2) = (y+z-w)(-\alpha_i + w^2) + w(-\alpha_i + w^2)=$
$=-\tau_i\alpha_i + \tau_i w^2 + w(zy - yw - zw + w^2) = -\tau_i\alpha_i + \tau_i w^2 + yzw - \tau_i w^2 = -\tau_i\alpha_i + \beta_i$
Представление $\gamma_{(i+1)} = \tau_{(i+1)} \cdot \alpha_{(i+1)} + \beta_{(i+1)}$аналогично.

Следствие 1. $P_i = \tau_i^3 - 3\gamma_i = \tau_i^3 + 3\tau_i\alpha_i - 3\beta_i$
Следствие 2.$\beta_i - \gamma_i = \tau_i\alpha_i\beta_i > \gamma_i$
Следствие 3.$P_{(i+1)} = \tau^3_{(i+1)} + 3\gamma_{(i+1)} = \tau^3_{(i+1)} + 3\tau_{(i+1)}\alpha_{(i+1)} + 3\beta_{(i+1)}$
Следствие 4.$\beta_{(i+1)} - \gamma_{(i+1)} = -\tau_{(i+1)}\alpha_{(i+1)}$,$\beta_{(i+1)} < \gamma_{(i+1)}$

4. Два представления P_{i+1}
$P_{(i+1)} = (z+y)^3 - (w-z)^3 - (w-y)^3 = 2P_i + 3zy(z+y) + 3wy(w-y) + 3wz(w-z)=$
$=2P_i + 3zy(w+\tau_i) + 3wy(z-\tau_i) + 3wz(y-\tau_i) = 2P_i + 9zyw - 3\tau_i\alpha_i = 2P_i + 9\beta_i - 3\tau_i\alpha_i=$
$=2\tau_i^3 + 6\tau_i\alpha_i - 6\beta_i + 9\beta_i - 3\tau_i\alpha_i = 2\tau_i^3 + 6\tau_i\alpha_i + 3\beta_i - 3\tau_i\alpha_i = 2\tau_i^3 + 6\tau_i\alpha_i + 3\gamma_i$

$P_{(i+1)} = \tau^3_{(i+1)} + 3\tau_{(i+1)}\alpha_{(i+1)} + 3\beta_{(i+1)} = 2^3\tau_i^3 + 3\cdot 2\tau_i(\alpha_i - \tau_i^2) + 3\beta_{(i+1)} = 2\tau_i^3 + 6\tau_i\alpha_i + 3\beta_{(i+1)}$

откуда следует
Следствие 5.$\beta_{(i+1)} = \gamma_i$ $(\beta_{(i+2)} = \gamma_{(i+1)})$
Следствие 6. Вместе с геометрической прогрессией со знаменателем 2 чиселτ_i имеем теперь геометрическую прогрессию с тем же знаменателем чисел
$P_{(i+1)} - 3\beta_{(i+1)} = 2(P_i + 3\beta_i) = \tau^3_{(i+!)} + 3\tau_{(i+1)}\alpha_{(i+1)} = 2(\tau_i^3 + 3\tau_i\alpha_i)$, содержащих кубические формы.

5. Пояснение к вычислению $\alpha_{(i+1)}$в п. 4
$\alpha_{(i+1)} = (z+y)(w-z) + (z+y)(w-y) - (w-z)(w-y)=$
$=zw + yw - yz - z^2 + zw + yw - yz - y^2 + zw + yw - yz - w^2=$
$=3\alpha_i - (z^2 + y^2 + w^2) = 3\alpha_i - (2\alpha_i + \tau_i^2) = \alpha_i - \tau_i^2$

6. Представление P_{i+2}
Не нарушая общности, ограничимся представлениями P_2 , P_2 - P_1 и P_0
(напоминание: $\beta_2 = \gamma_1$,$\beta_1 = \gamma_0$,$\beta_1 - \gamma_0 = -\alpha_1\tau_1$,$\tau_1 = 2\tau_0$,$P_1 = 2\tau_0^3 + 6\tau_0\alpha_0 + 3\beta_1$)

$P_2 + 3\beta_2 = 2P_1 - 6\beta_1$
$P_2 = 2P_1 - 6\beta_1 - 3\gamma_1 = 2P_1 - 9\beta_1 + 3(\beta_1 - \gamma_1) = 4\tau_0^3 + 12\tau_0\alpha_0 + (6\gamma_0 - 9\gamma_0) - 3\tau_1\alpha_1=$
$=4\tau_0^3 + 12\tau_0\alpha_0 - 3\gamma_o - 3\cdot 2\tau_0(\alpha_0 - \tau_0^2) = 10\tau_0^3 + 6\tau_0\alpha_0 - 3\gamma_0$

7. Для движения от P_0 в сторону младших членов прогрессии представим ещё общее выражение дляα_i, вытекающее из Следствия 6.
$\tau_i^3 + 3\tau_i\alpha_i = 2^i(3\tau_0\alpha_0 + \tau_0^3)$
$$\alpha_i = \alpha_0 - \frac{(2^{2i} - 1)}{3}\tau_0^2$$
В частности, $\alpha_{-1} = \alpha_0 - \frac{(2^{-2} - 1)}{3}\tau^2 = \alpha_0 + \frac{1}{4}\tau^2$
$$P_{-1} = \frac{17}{8}\tau_0^3 + 6\tau_0\alpha_0 - 3\beta_0$$

8. В предположении, что y, z, w — целые взаимно-простые числа, мы имеем ещё одну возможность представить кубы малых чиселτ, составленных из рациональных чисел$\frac{1}{y} > \frac{1}{z} > \frac{1}{w}$

При этом$\tau_j = \frac{1}{w} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{(zy+wy-wz)}{\beta} = \frac{(2wy-\alpha)}{\beta}$,

где$\alpha = wy + wz - zy$,$\beta = wzy$

$\tau_j^3 \beta^3 = (2wy - \alpha)^3$

Из (*) в случае P_j =0 следует:$\tau_j^3 \beta^3 = 3\gamma_j \beta^3$, где $\gamma_j = \frac{(y+z)}{zy} \frac{(w-z)}{wz} \frac{(w-y)}{wy} = \frac{abc}{\beta^2}$

$\tau_j^3 \beta^3 = 3\frac{abc}{\beta^2}\beta^3$,$(2wy - \alpha)^3 = 3abc\beta$(**)

Правая часть равенства, очевидно, не является кубом целого числа, что приводит к отрицательному ответу на вопрос в условии задачи Ферма для показателя степени 3.

Послесловие

Может быть, в связи с этим вариантом решения для кубов на полях *«Арифметики» Диофанта* появилось замечание Пьера Ферма: *«Нельзя разделить ни куб на два куба, ни квадрато-квадрат на на два квадрато-квадрата, и вообще никакую степень выше квадрата и до бесконечности нельзя разделить на две степени с тем же показателем: я обнаружил совершенно удивительное доказательство этого. Но оно не умещается на узких полях».*

Для перехода от кубов к четвёртой, пятой и т.д. степеням надо, чтобыτ_jсодержало дробные - со знаменателем 3 - отрицательные степени целых чисел w, z, y. Равенство (**) показывает, что правая часть его при этом будет иррациональным числом, тогда как левая часть будет целым числом. Это означает, чтоP_jне может быть нулём.

«Есть более простые соображения, ведущие к правильному решению в п.8 и к «совершенно удивительному» - в этом послесловии. Уверен, их найдёт читатель, не потерявший интереса к арифметике».